

Orlicz 序列空间的 (k) 性质

左明霞, 彭丽娜

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: (k) 性质是 Banach 空间中一个重要的几何性质, 它与弱不动点性质密切相关。利用 Banach 空间及 Orlicz 空间的几何理论, 研究 (k) 性质在一类具体的 Banach 空间——Orlicz 序列空间中的刻画问题。给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间具有 (k) 性质的判别准则。作为推论, 得到了这类空间具有弱不动点性质的一个充分条件。

关键词: Orlicz 序列空间; Luxemburg 范数; Orlicz 范数; (k) 性质

DOI: 10.15938/j.jhust.2017.06.023

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2017)06-0122-05

Property (k) of Orlicz Sequence Spaces

ZUO Ming-xia, PENG Li-na

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Property (k) is an important geometric property in Banach spaces, and it is closely associated with fixed point property. By the geometric theory of Banach spaces and Orlicz spaces, we investigated the characterization for property (k) in a special class of Banach spaces—Orlicz sequence spaces. Criteria for property (k) in Orlicz sequence spaces equipped with both the Luxemburg norm and the Orlicz norm are given. As a corollary, the sufficient condition that this kind of spaces has weak fixed point property is obtained.

Keywords: Orlicz sequence space; Luxemburg norm; Orlicz norm; property (k)

0 引言

不动点问题自 20 世纪以来已成为人们研究的热门课题之一。近年来, 关于非扩张映射的不动点理论得到了很大的发展, 这些理论在微分方程、动力系统理论、经济均衡理论及控制论等领域有着广泛的应用。一些数学工作者利用 Banach 空间的几何性质讨论了定义在非空的有界闭凸集上的非扩张映射的不动点的存在性。例如, Browder 和 Kirk 分别

证明了一致凸和具有正规结构的 Banach 空间上的非扩张映射具有不动点性质^[1,2]。这些结果将 Banach 空间的几何性质和非线性映射的不动点性质联系在了一起。此后国内外的一些学者利用空间的几何性质对非扩张映射的不动点性质进行了广泛的研究, 得到了许多重要的结果^[3-14]。人们在考虑不动点性质的同时, 引入了弱不动点性质的概念。Banach 空间 X 称为具有弱不动点性质是指如果 C 是 X 的一个非空的弱紧凸子集, $T: C \rightarrow C$ 是一个非扩张映射(即 $\forall x, y \in C$, 有 $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$), 则

收稿日期: 2017-07-08

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12531137)。

作者简介: 左明霞(1979—), 女, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, E-mail: zuomxhust@163.com;

彭丽娜(1990—), 女, 硕士研究生。

T 在 C 上必有一个不动点。后来, Kirk 在 Banach 空间中引入了弱正规结构的概念, 并证明了弱正规结构蕴涵弱不动点性质^[5]。1994 年, Sims 在文 [6] 中引入了 (k) 性质的概念, 证明了若 Banach 空间 X 具有 (k) 性质, 则 X 具有弱正规结构, 并且给出了 Banach 空间 X 具有 (k) 性质的一些充分条件。因此, (k) 性质是与弱不动点性质密切相关的一个重要的几何性质。本文将讨论 (k) 性质在一类具体的 Banach 空间——Orlicz 序列空间中的刻画问题, 给出了赋 Luxemburg 范数和赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间具有 (k) 性质的充分必要条件, 从而得到这类空间具有弱不动点性质的一个充分条件。

1 预备知识

设 X 为 Banach 空间, X^* 表示 X 的对偶空间, $B(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示 X 的闭单位球和单位球面。 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示正整数集, 实数集和整数集。

定义 1^[4] 称 Banach 空间 X 具有 (k) 性质是指存在常数 $k \in [0, 1)$, 使得若 $\{x_n\} \subset S(X)$, $x_n \xrightarrow{w} 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq 1$, 则有 $\|x\| \leq k$ 。

下面给出与 Orlicz 空间相关的一些定义, 这些内容请参见文献 [7-20]。

定义 2 称映射 $M: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ 为 Orlicz 函数是指:

- 1) M 是偶的、连续的凸函数且 $M(0) = 0$;
- 2) 当 $u \neq 0$ 时, $M(u) > 0$;
- 3) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$ 。

称函数

$$N(v) = \sup_{u \geq 0} \{u|v| - M(u)\}, v \in \mathbb{R}$$

为 $M(u)$ 的余函数, 函数 $N(v)$ 也是一个 Orlicz 函数。

定义 3 称 Orlicz 函数 M 满足 Δ_2 -条件(记为 $M \in \Delta_2$) 是指存在常数 $K > 0$ 及 $u_0 > 0$, 使得对任意的 $u \in \mathbb{R}$, $|u| \leq u_0$ 时, 有

$$M(2u) \leq KM(u)。$$

定义 4 用 l^0 表示所有的实数序列所构成的集合。对任意的 $x = (x(i)) \in l^0$, 称

$$\rho_M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M(x(i))$$

为 x 关于 Orlicz 函数 M 的凸模。线性集

$$\{x \in l^0: \exists \lambda > 0, \rho_M(\lambda x) < \infty\}$$

关于 Luxemburg 范数

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0: \rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

或 Orlicz 范数

构成 Banach 空间, 称为赋 Luxemburg 范数或赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间, 记为 l_M 或 l_M^o 。其子空间

$$\{x \in l^0: \forall \lambda > 0, \rho_M(\lambda x) < \infty\}$$

继承上述范数也是 Banach 空间, 记为 h_M 或 h_M^o 。

已经证明 $h_M = l_M$ (或 $h_M^o = l_M^o$) 的充分必要条件是 $M \in \Delta_2$ 。

定义 5 对任意的 $x \in l_M$ (或 $x \in l_M^o$) 定义

$$\theta_M(x) = \inf \left\{ \lambda > 0: \rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \infty \right\}。$$

在文 [7] 中证明了下面的关系:

$$\theta_M(x) = \text{dist}(x, h_M) = \text{dist}(x, h_M^o),$$

其中 $\text{dist}(x, h_M) = \inf \{ \|x - y\| : y \in h_M \}$, $\text{dist}(x, h_M^o) = \inf \{ \|x - y\|^o : y \in h_M^o \}$ 。

定义 6 泛函 $\varphi \in (l_M)^*$ (或 $(l_M^o)^*$) 称为一个奇异泛函(记为 $\varphi \in F$) 是指对任意的 $x \in h_M$ (或 h_M^o), 有 $\varphi(x) = 0$ 。

引理 1^[7] 对任意的 $f \in (l_M)^*$ (或 $(l_M^o)^*$) 存在唯一的分解:

$$f = y + \varphi,$$

其中 $\varphi \in F, y \in l_N^o$ (或 l_N) 满足 $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) y(i)$ ($\forall x = (x(i)) \in l_M$ (或 l_M^o))。

引理 2^[7] 若 $M \in \Delta_2, x \in l_M$, 则

1) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|x\| \geq \varepsilon \Rightarrow \rho_M(x) \geq \delta$$

2) 对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$\rho_M(x) \leq 1 - \varepsilon \Rightarrow \|x\| \leq 1 - \delta$$

3) 对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$\rho_M(x) > 1 + \varepsilon \Rightarrow \|x\| \geq 1 + \delta$$

由于 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价, 所以引理 2 中结论 (1) 对于 Orlicz 范数也成立。

2 主要结果及证明

定理 1 赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 序列空间 l_M 具有 (k) 性质的充分必要条件是 $M \in \Delta_2$ 。

证明: 必要性。为了方便, 对任意的实数序列 $x = (x(i))$, 当 $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ 时, 记

$$[x]_n^m = (0, \dots, 0, x(n+1), x(n+2), \dots, x(m), 0, \dots)$$

若 $M \notin \Delta_2$, 则存在正数序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, u_n \searrow 0$,

满足

$$M\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right) > 2^{n+1}M(u_n)$$

且 $M(u_n) < \frac{1}{2^n}$ ($n=1,2,\dots$)。对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 取正整数 m_n , 使得

$$m_n M(u_n) \leq \frac{1}{2^n} < (m_n + 1) M(u_n)$$

选取集合 $I_n \subset \mathbb{Z}$, 满足 $\text{Card}(I_n) = m_n$ 且 $I_n \cap I_m = \emptyset$ ($n \neq m$)。令 $x = (x(i))$, 其中

$$x(i) = \begin{cases} a, & i \in I_1, \\ u_n, & i \in I_n, n=2,3,\dots, \\ 0, & i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \end{cases}$$

这里 a 为选取的一个实数, 满足 $\rho_M(x) = 1$ 。从而 $\|x\| = 1$ 。因为对任意的 $\tau > 0$, $\rho_M((1+\tau)x) = \infty$, 所以 $\theta_M(x) = 1$ 。从而对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\| [x]_n^\infty \| = \| x - [x]_0^n \| \geq \text{dist}(x, h_M) = \theta_M(x) = 1。$$

令 $i_1 = 0$, 因为 $\| [x]_{i_1}^\infty \| = \| x \| = 1 > 0$ 及 $\lim_{i \rightarrow \infty} \| [x]_{i_1}^i \| = \| [x]_{i_1}^\infty \|$, 所以存在 $i_2 > i_1$, 使得 $\| [x]_{i_1}^{i_2} \| > 0$ 。

因为 $\| [x]_{i_2}^\infty \| \geq 1 > 1 - \frac{1}{2}$ 和 $\lim_{i \rightarrow \infty} \| [x]_{i_2}^i \| =$

$\| [x]_{i_2}^\infty \|$, 所以存在 $i_3 > i_2$, 使得 $\| [x]_{i_2}^{i_3} \| > 1 - \frac{1}{2}$ 。

.....

如此继续下去, 可以得到自然数序列 $i_1 < i_2 < \dots$, 使得 $\| [x]_{i_n}^{i_{n+1}} \| > 1 - \frac{1}{n}$ ($n=1,2,\dots$)。

令 $x_n = [x]_{i_n}^{i_{n+1}} = (0, \dots, 0, x(i_n+1), \dots, x(i_{n+1}), 0, \dots)$ ($n=1,2,\dots$), 则 $x_n \in h_M$ 且 $1 = \|x\| \geq \|x_n\| = \| [x]_{i_n}^{i_{n+1}} \| > 1 - \frac{1}{n}$ ($n=1,2,\dots$)。因此 $\|x_n\| \rightarrow 1$ 。对任意的 $f = y + \varphi \in (l_M)^*$, 其中 $\varphi \in F, y \in l_N^0$, 有

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) y(i) + \varphi(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) y(i) = \sum_{i=i_n+1}^{i=i_{n+1}} x(i) y(i) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

所以 $x_n \xrightarrow{w} 0$ 。由

$$\begin{aligned} 1 &= \|x\| \geq \|x - x_n\| = \\ &\| (x(1), \dots, x(i_n), 0, \dots, 0, x(i_{n+1}+1), \dots) \| \geq \end{aligned}$$

$\| (x(1), \dots, x(i_n), 0, 0, \dots) \| \rightarrow \|x\| = 1$, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 1$ 。又因为

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - x \right\| &= \left\| \frac{x_n - x}{\|x_n\|} + \left(\frac{1}{\|x_n\|} - 1 \right) x \right\| \leq \\ &\frac{\|x_n - x\|}{\|x_n\|} + \frac{1}{\|x_n\|} - 1, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - x \right\| \leq 1$ 。但对任意的 $k \in (0, 1)$, $\|x\| = 1 > k$, 这与 X 具有 (k) 性质相矛盾。

充分性。设 $M \in \Delta_2$, 若 l_M 不具有 (k) 性质, 则 $\forall k \in (0, 1)$, 存在序列 $\{x_n\} \subset S(l_M)$ 及 $x \in l_M$, 满足

$x_n \xrightarrow{w} 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq 1$, $\|x\| > k$ 。因为 $M \in \Delta_2$, 所以由引理 2, 1) 可知存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得对任意的 $y \in l_M$, 若 $\|y\| \geq k$, 则 $\rho_M(y) \geq \delta$ 。对上述 $\delta \in (0, 1)$, 由 $M \in \Delta_2$ 及引理 2, 2) 可知存在 $\delta_0 \in (0, 1)$, 使得对任意的 $y \in l_M$, 若 $\|y\| > 1 - \delta_0$, 就有 $\rho_M(y) > 1 - \frac{\delta}{2}$ 。再由 $M \in \Delta_2$ 及引理 2, 3) 可知存在 $0 < \delta_1$

$< \min\{1, 3\delta_0\}$, 使得对任意的 $y \in l_M$, 若 $\rho_M(y) > 1 + \frac{\delta}{2}$, 则 $\|y\| \geq 1 + \delta_1$ 。因为 $\|(x(1), x(2), \dots, x(n), 0, 0, \dots)\| \rightarrow \|x\|$ ($n \rightarrow \infty$), 所以存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|(x(1), x(2), \dots, x(i_0), 0, 0, \dots)\| \geq k。$$

因为 $M \in \Delta_2$, 对于上述的 δ_1 , 存在 $i_1 \geq i_0$, 使得 $\|(0, \dots, 0, x(i_1+1), x(i_1+2), \dots)\| < \frac{\delta_1}{3}$ 。再由 x_n

$\xrightarrow{w} 0$, 可知 $x_n(i) \rightarrow 0$ ($i=1,2,\dots$)。因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\|(x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(i_1), 0, 0, \dots)\| < \frac{\delta_1}{3}。$$

于是当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &\geq \\ \|(x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots)\| &- \\ \|(x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(i_1), 0, \dots)\| &- \\ \|(0, \dots, 0, x(i_1+1), x(i_1+2), \dots)\| &\geq \\ \|(x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots)\| &- \frac{2}{3}\delta_1。 \end{aligned}$$

当 $n \geq n_0$ 时, 由

$$\begin{aligned} \|(0, \dots, 0, x_n(i_1+1), x_n(i_1+2), \dots)\| &\geq \\ 1 - \|(x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(i_1), 0, 0, \dots)\| &> \\ 1 - \frac{\delta_1}{3} &> 1 - \delta_0 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \|(x(1), x(2), \dots, x(i_1), 0, 0, \dots)\| &\geq \\ \|(x(1), x(2), \dots, x(i_0), 0, 0, \dots)\| &\geq k, \end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{i_1} M(x(i)) + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(x_n(i)) > \delta + 1 - \frac{\delta}{2} = 1 +$$

$\frac{\delta}{2}$, 故当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\|(x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots)\| \geq 1 + \delta_1. \text{ 于是 } \|x_n - x\| \geq 1 + \frac{\delta_1}{3} (n \geq n_0), \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq 1 \text{ 矛盾. 故}$$

$$\|x_n - x\| \geq 1 + \frac{\delta_1}{3}, \text{ 这与 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq 1 \text{ 矛盾. 故}$$

l_M 具有 \$(k)\$ 性质。

推论 1 若 $M \in \Delta_2$, 则赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 序列空间 l_M 具有弱不动点性质。

定理 2 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间 l_M^o 具有 \$(k)\$ 性质的充分必要条件是 $M \in \Delta_2$ 。

证明: 必要性. 若 $M \notin \Delta_2$, 则由定理 1 必要性的证明过程可知存在 $y \in S(l_M)$, 满足 $\theta_M(y) = 1$ 。对任意的 $k \in [0, 1)$, 取 $0 < \varepsilon < 1$, 使得 $\frac{1}{1+\varepsilon} > k$ 。因为

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, y(i+1), y(i+2), \dots)\|^o = \theta_M(y) = 1 < 1 + \varepsilon,$$

所以存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|(0, \dots, 0, y(i_0+1), y(i_0+2), \dots)\|^o < 1 + \varepsilon.$$

令

$$x = (0, \dots, 0, y(i_0+1), y(i_0+2), \dots),$$

则 $x \in l_M^o$ 且 $1 = \theta_M(y) = \text{dist}(y, h_M^o) \leq \|x\|^o < 1 + \varepsilon$ 。

因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|[y]_{i_0}^i\|^o = \|[y]_{i_0}^\infty\|^o \geq \text{dist}(y, h_M^o) = \theta_M(y) = 1 > \frac{1+\varepsilon}{2}$, 所以存在 $i_1 > i_0$, 使得 $\|[y]_{i_0}^{i_1}\|^o > \frac{1+\varepsilon}{2}$ 。

因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|[y]_{i_1}^i\|^o = \|[y]_{i_1}^\infty\|^o \geq \text{dist}(y, h_M^o) = \theta_M(y) = 1 > \frac{1+\varepsilon}{2}$, 所以存在 $i_2 > i_1$, 使得 $\|[y]_{i_1}^{i_2}\|^o > \frac{1+\varepsilon}{2}$ 。

.....

如此继续下去, 可以得到正整数序列 $i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n < i_{n+1} < \dots$, 使得 $\|[y]_{i_n}^{i_{n+1}}\|^o > \frac{1+\varepsilon}{2}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)。令 $x_n = [y]_{i_n}^{i_{n+1}}$, 则 $x_n \in h_M^o$ 且 $\frac{1+\varepsilon}{2} < \|x_n\|^o \leq \|x\|^o < 1 + \varepsilon$ ($n=1, 2, \dots$)。对任意的 $f = z + \varphi \in (l_M^o)^*$, 其中 $\varphi \in F, z \in l_N$, 有

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) z(i) + \varphi(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n(i) z(i) = \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} y(i) z(i) \rightarrow 0,$$

所以 $x_n \xrightarrow{w} 0$ 。取 $k_0 > 0$, 使得

$$\left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\|^o = \frac{1}{k_0} \left(1 + \rho_M \left(\frac{k_0 x}{1+\varepsilon} \right) \right).$$

于是

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|^o} - \frac{x}{1+\varepsilon} \right\|^o \leq \frac{1}{k_0} \left(1 + \rho_M \left(k_0 \left(\frac{x_n}{\|x_n\|^o} - \frac{x}{1+\varepsilon} \right) \right) \right) = \left(1 + \sum_{i=i_0+1}^{i_n} M \left(\frac{k_0 y(i)}{1+\varepsilon} \right) + \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} M \left(k_0 \left(\frac{1}{\|x_n\|^o} - \frac{1}{1+\varepsilon} \right) y(i) \right) \right) \leq \left(1 + \sum_{i=i_0+1}^{i_n} M \left(\frac{k_0 y(i)}{1+\varepsilon} \right) + \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} M \left(\frac{k_0 y(i)}{1+\varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{k_0} \left(1 + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} M \left(\frac{k_0 y(i)}{1+\varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{k_0} \left(1 + \rho_M \left(\frac{k_0 x}{1+\varepsilon} \right) \right) = \left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\|^o = \frac{1}{1+\varepsilon} \|x\|^o < 1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

但 $\left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\|^o = \frac{\|x\|^o}{1+\varepsilon} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} > k$, 所以 X 不具有 \$(k)\$ 性质。必要性得证。

充分性. 设 $M \in \Delta_2$, 若 l_M^o 不具有 \$(k)\$ 性质, 则对任意的 $k \in (0, 1]$, 存在 $\{x_n\} \subset S(l_M^o)$ 及 $x \in l_M^o$, 满足 $x_n \xrightarrow{w} 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^o \leq 1, \|x\|^o > k$ 。因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|(x(1), x(2), \dots, x(i), 0, 0, \dots)\|^o = \|x\|^o > k$, 所以存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|(x(1), x(2), \dots, x(i_0), 0, 0, \dots)\|^o > k$$

因为 $M \in \Delta_2$, 对上述 $k > 0$, 由引理 2 可知存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $y \in l_M^o$, 若 $\|y\|^o \geq \frac{k}{3}$, 则 $\rho_M(y) \geq \delta$ 。

又因为 $M \in \Delta_2$, 所以 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, x(i+1), x(i+2), \dots)\|^o = 0$ 。

从而存在 $i_1 \geq i_0$, 使得

$$\|(0, \dots, 0, x(i_1+1), x(i_1+2), \dots)\|^o < \frac{\delta}{4}$$

由 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 知 $x_n(i) \rightarrow 0 (i=1, 2, \dots)$ 。因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\| (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(i_1), 0, 0, \dots) \|^\circ < \frac{\delta}{4}$$

于是当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \|x_n - x\|^\circ \geq \\ & \| (x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots) \|^\circ - \\ & \| (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(i_1), 0, 0, \dots) \|^\circ - \\ & \| (0, \dots, 0, x(i_1+1), x(i_1+2), \dots) \|^\circ \geq \\ & \| (x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots) \|^\circ - \\ & \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 取 $k_n > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \| (x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots) \|^\circ = \\ & \frac{1}{k_n} (1 + \sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i))) \end{aligned}$$

从而当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \|x_n - x\|^\circ \geq \\ & \frac{1}{k_n} (1 + \sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i))) - \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

下面分两种情况讨论:

1) 有无穷多个 $k_n \geq 1$ 。此时不失一般性, 不妨设 $k_n \geq 1 (n=1, 2, \dots)$ (否则可取 $\{k_n\}$ 的子列)。于是当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \|x_n - x\|^\circ \geq \frac{1}{k_n} (1 + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i))) + \\ & \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) - \frac{\delta}{2} \geq \\ & \frac{1}{k_n} (1 + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i))) + \\ & \sum_{i=1}^{i_1} M(x(i)) - \frac{\delta}{2} \geq \\ & \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k x_n(i))) + \delta - \frac{\delta}{2} = \end{aligned}$$

$$\| (0, \dots, 0, x_n(i_1+1), x_n(i_1+2), \dots) \|^\circ + \frac{\delta}{2} \geq$$

$$1 - \| (x_n(1), \dots, x_n(i_1), 0, 0, \dots) \|^\circ + \frac{\delta}{2} =$$

$$1 - \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{4}$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^\circ \leq 1$ 矛盾。

2) 有无穷多个 $k_n < 1$ 。不失一般设 $k_n < 1 (n=1, 2, \dots)$ 。由

$$3 \geq \|x\|^\circ + \|x_n\|^\circ \geq$$

$$\| (x(1), \dots, x(i_1), -x_n(i_1+1), -x_n(i_1+2), \dots) \|^\circ =$$

$$\frac{1}{k_n} (1 + \sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i))) \geq \frac{1}{k_n}$$

可知 $k_n \geq \frac{1}{3} (n=1, 2, \dots)$ 。从而有

$$\begin{aligned} & \|k_n (x(1), x(2), \dots, x(i_1), 0, 0, \dots) \|^\circ = \\ & k_n \| (x(1), x(2), \dots, x(i_1), 0, 0, \dots) \|^\circ \geq \\ & k_n \| (x(1), x(2), \dots, x(i_0), 0, 0, \dots) \|^\circ > \frac{k}{3} \end{aligned}$$

因此 $\sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) \geq \delta$ 。从而当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \|x_n - x\|^\circ > 1 + \sum_{i=1}^{i_1} M(k_n x(i)) + \\ & \sum_{i=i_1+1}^{\infty} M(k_n x_n(i)) - \frac{\delta}{2} \geq \end{aligned}$$

$$1 + \delta - \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2}$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^\circ \leq 1$ 矛盾。

推论 2 若 $M \in \Delta_2$, 则赋 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间 l_M° 具有弱不动点性质。

参考文献:

- [1] BROWER F E. Nonexpansive Nonlinear Operators in a Banach space [J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1965 (54): 1041-1044.
- [2] KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Mappings Which do not Increasedistances [J]. Amer. Math. Monthly, 1965, 72 (1): 1004-1006.
- [3] SIMS B. Orthogonality and Fixed Points of Nonexpansive Maps [J]. Proc. Centre. Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 1988, 20 (7): 178-186.
- [4] OPIAL Z O. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings [J]. Bull. Amer. Math. Soc, 1967 (73): 591-597.
- [5] FALSET G J. The Fixed Point Property in Banach Spaces with NUS Property [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997 (215): 532-542.
- [6] FALSET G J, FUSTER L E, NAVARRO M E. Uniformly Nonsquare Banach Spaces Have the Fixed Point Property for Non-expansive Mappings [J]. J. Funct. Anal., 2006 (233): 494-514.
- [7] SIMS B, SMYTH M A. On Some Banach Space Properties Sufficient for Weak Normal Structure and Their Perma Nence Properties [J]. Trans. Am. Math. Soc., 1999 (351): 497-513.
- [8] DOWLING P N, LENNARD C J, TURE TT B. Weak Compactness is Equivalent to the Fixed Point in c_0 [J]. Proc. Am. Math. Soc., 2004 (132): 1659-1666.
- [9] KIRK W A, SIMS B. Uniform Normal Structure and Related Notions [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2011, 2 (1): 129-138.

(下转第130页)

代法的效率指数为 $2^{\frac{1}{2n}}$, 拟牛顿迭代法的效率指数为 $3^{\frac{1}{3n}}$, 改拟牛顿迭代法的效率指数均为 $3^{\frac{1}{3n}}$, 即拟牛顿迭代法与改拟牛顿迭代法的计算效率高于牛顿迭代法, 而改拟牛顿迭代法的计算效率与拟牛顿迭代法的计算效率是一样的。但是, 改进拟牛顿算法比拟牛顿算法少算了一个矩阵的逆, 因此对拟牛顿迭代法的修改是有一定意义的。

6 结 论

本文主要介绍了改进拟牛顿迭代法的形式, 证明了该方法的收敛性, 利用数值实验证明了改进拟牛顿迭代法的收敛阶数为 3 阶, 进行了三种迭代法的比较, 说明了改进拟牛顿迭代法的有效性。

参 考 文 献:

- [1] HALLEY E. A New. Exact and Easy Method for Finding the Roots of Equations Generally and without Any Previous Reduction [J]. Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1694(18): 136–148.

- [2] KOU J, LI Y. Modified Chebyshev's Method Free from Second Derivative for Nonlinear Equations [J]. J. Appl. Math. Comput., 2007, 187(2): 1027–1032.
- [3] GUTIERREZ J M, HERNANDEZ M A. An Acceleration of Newton's Method: Super Halley Method [J]. J. Appl. Math. Comput., 2001, 117(2): 223–239.
- [4] KING R F. A Family of Fourth Order Methods for Nonlinear Equations [J]. SI AMJ. Numer. Anal., 1973(10): 876–879.
- [5] LIU Z, ZHENG Q, ZHAO P. A Variant of Ste Ensens Method of Fourth-order Convergence and Its Applications [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(7): 1978–1983.
- [6] OSTROWSKI A M. Solutions of Equations and Systems of Equations [M]. New York: Academic Press, 1966.
- [7] KUNG H T, TRAUB J F. Optimal Order of One-point and Multi-point Iteration [J]. J. Assoc. Comput. Mach., 1974(21): 643–651.
- [8] 黄象鼎, 曾钟钢, 马亚南. 非线性数值分析的理论与方法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [9] 李庆杨, 莫孜中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

(编辑: 关 毅)

(上接第 126 页)

- [10] KIRK W A, SIMS B. Handbook of Metric Fixed Point Theory [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [11] 左占飞, 崔云安. 广义凸性模在不动点中的应用 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2009, 26(2): 206–210.
- [12] 王俊明, 陈丽丽, 崔云安. 平均非扩张映射的不动点性质 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(3): 298–301.
- [13] CUI Y A, HUDZIK H, WISLA M. M-Constant, Dominguez-Benavides Coficiet, and Weak Fixed Point Property in Orlicz Sequence Spaces Equipped with Thep-Amemiya Norm [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2016, 89: 1–14.
- [14] 左占飞, 王良伟, 刘学飞, 等. Banach 空间中弱收敛序列系数的估计 [J]. 数学学报(中文版), 2016, 59(2): 145–150.
- [15] GOEBEL K, KIRK W A. Topics in Metric Fixed Point Theory, in: Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28 [M]. New

York: Cambridge University Press, 1990.

- [16] SIMS B. A Class of Spaces with Weak Normal Structure [J]. Bull. Austral. Ma th. Soc., 1994(50): 523–528.
- [17] CHEN S T. Geometry of Orlicz Spaces [M]. Warszawa: Dissertations Math., 1996.
- [18] RAO M M, REN Z D. Theory of Orlicz Spaces [M]. New York: Marcel Dekker, 1991.
- [19] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII Y B. Convex Function and Orlicz Spaces [M]. Groningen: P. Noordhoff, 1961.
- [20] MALLGRANDA L. Orlicz Spaces and Interpolation, in: Seminars in Mathematics 5 [M]. Sao Paulo: Campinas Univ., 1989.

(编辑: 温泽宇)